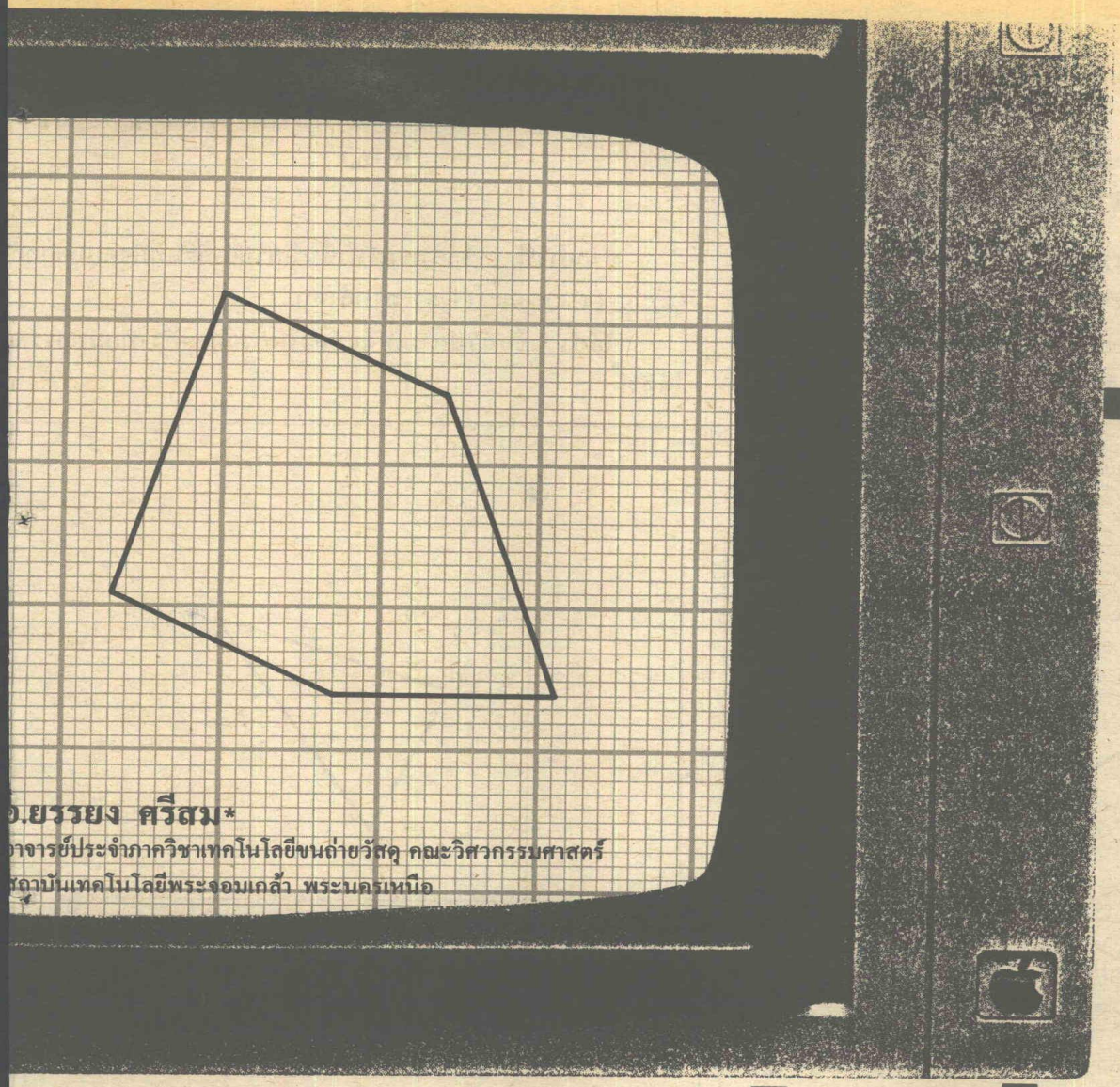


การหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

อ.ยรรยง ศรีสม*
อาจารย์ประจำภาควิชาเทคโนโลยีขนถ่ายวัสดุ คณะวิศวกรรมศาสตร์
สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้า พระนครเหนือ

นำ

เมื่อกล่าวถึงพื้นที่ ท่านผู้อ่านก็คงนึกถึง พื้นที่ห้องนอน พื้นที่
มหญ้าหน้าบ้าน หรือ พื้นที่ห้องทำงาน เป็นต้น แต่ถ้าต้องการ
วณหาพื้นที่ของสิ่งเหล่านี้ ก็จะต้องมาพิจารณาก่อนว่า มีรูปทรง
บบมาตรฐานหรือไม่ ถ้ารูปทรงไม่เป็นแบบมาตรฐาน การคำนวณ
นที่ก็จะยุ่งยากและเสียเวลานาน สำหรับในกรณีที่รูปทรงเป็นแบบ
ฐาน การคำนวณหาพื้นที่ก็จะทำได้ง่ายโดยใช้สูตรที่หาได้จาก
สือคณิตศาสตร์ทั่วไป เช่น

สามเหลี่ยม	$= \frac{1}{2}$ (ความยาวฐาน) (ความสูง)
พื้นที่สี่เหลี่ยม	= (ความยาวด้านกว้าง) (ความยาวด้านยาว)
พื้นที่หลายเหลี่ยมด้านเท่า	$= \frac{1}{2}$ (จำนวนด้าน) (ความยาวด้าน) (ระยะทางตั้งฉากจากด้านถึงจุดศูนย์กลาง)
พื้นที่วงรี	$= \frac{\pi}{4}$ (เส้นผ่าศูนย์กลางเล็ก) (เส้นผ่าศูนย์กลางใหญ่)

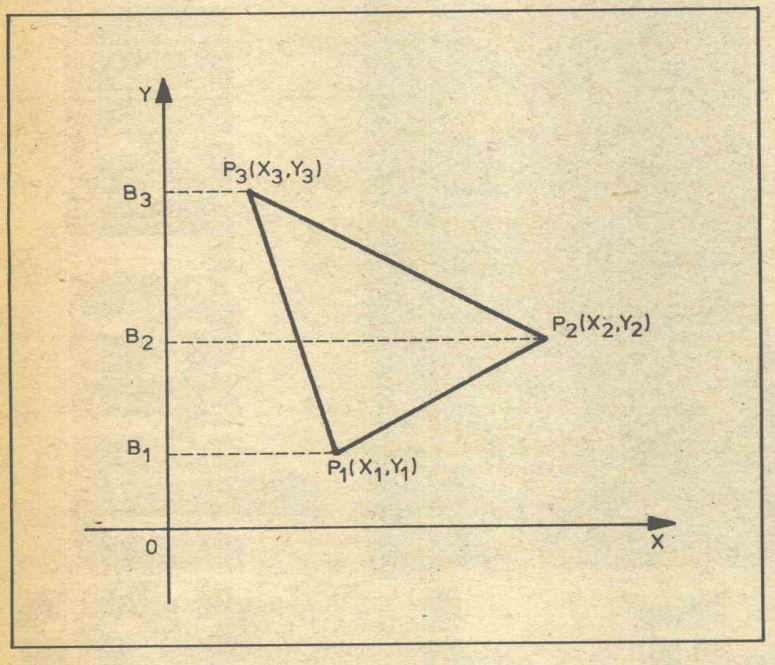
จะเห็นได้ว่าสูตรที่ใช้ในการคำนวณหาพื้นที่ของรูปทรงที่เป็นแบบมาตรฐานนั้น ท่านผู้อ่านก็คงคุ้นเคยกันดีแล้วทุกท่าน สำหรับการคำนวณหาพื้นที่ของรูปทรงที่ไม่เป็นแบบมาตรฐานนั้นมีหลายวิธี บทความนี้จะขอเสนอสูตร และโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาเบสิค สำหรับ

คำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม เมื่อทราบจุดโคออร์ดิเนตของมุมยอดเท่านั้น

วิธีการคำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

การคำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมนี้ จะเริ่มต้นด้วยการเขียนรูปหลายเหลี่ยมลงในกระดาษกราฟแบบธรรมดา จากรูปจะทราบจุดโคออร์ดิเนต(coordinate) ของมุมยอดของรูปหลายเหลี่ยมทุกจุดสำหรับสูตรในการคำนวณหาพื้นที่ของรูปทรงนี้จะพิสูจน์ได้ดังต่อไปนี้

สมมุติว่าต้องการคำนวณหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมเมื่อทราบจุดมุมยอดดังนี้



กำหนดให้ $P_1(X_1,Y_1)$, $P_2(X_2,Y_2)$ และ $P_3(X_3,Y_3)$ เป็นจุดมุมยอดของสามเหลี่ยม $P_1P_2P_3$ ดังนั้นพื้นที่ของสามเหลี่ยมรูปนี้จะคำนวณหาได้โดยใช้หลักการต่อไปนี้ (ถ้าเรียงจุดมุมยอดแบบทวนเข็มนาฬิกา)

พื้นที่สามเหลี่ยม = พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $B_1P_1P_2B_2$ + พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $B_2P_2P_3B_3$ - พื้นที่สี่เหลี่ยมคางหมู $B_1P_1P_3B_3$

$$= \frac{1}{2}(x_1+x_2)(y_2-y_1) + \frac{1}{2}(x_2+x_3)(y_3-y_2) - \frac{1}{2}(x_1+x_3)(y_3-y_1)$$

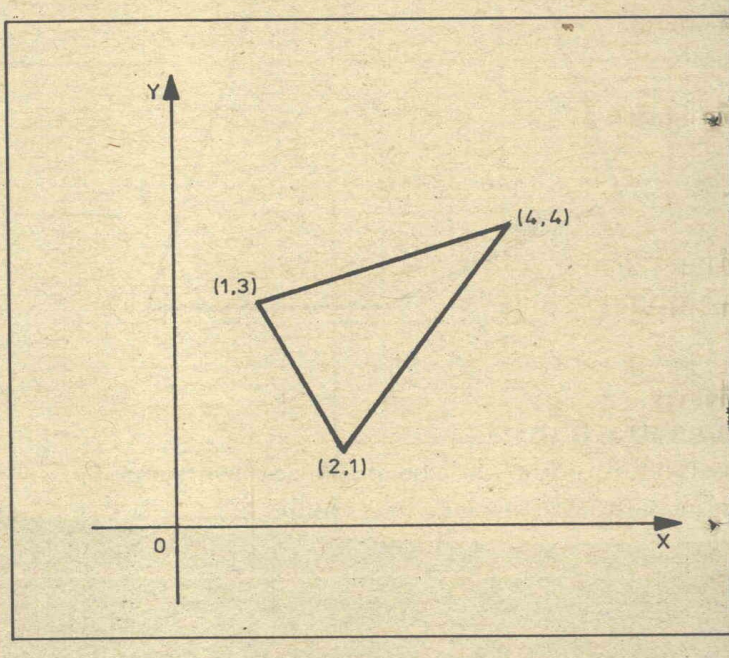
$$= \frac{1}{2}[(x_1+x_2)(y_2-y_1) + (x_2+x_3)(y_3-y_2) + (x_3+x_1)(y_1-y_3)]$$

ในทำนองเดียวกันจะสามารถพิสูจน์สูตรหาพื้นที่ของรูป n เหลี่ยมได้ดังนี้

พื้นที่ของรูป n เหลี่ยม $= \frac{1}{2}[(x_1+x_2)(y_2-y_1) + (x_2+x_3)(y_3-y_2)$
$\cdots\cdots + (x_{n-1}+x_n)(y_n-y_{n-1}) + (x_n+x_1)(y_1-y_n)]$

ตัวอย่างที่ 1 จงคำนวณหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดมุมยอดเป็น (2,1), (4,4) และ (1,3) ตามลำดับ

วิธีทำ เขียนรูปสามเหลี่ยมลงในกระดาษกราฟแบบธรรมดาได้ดังนี้



ก. เรียงจุดมุมยอดแบบทวนเข็มนาฬิกา กำหนดให้ $p_1(x_1,y_1) = P_1(2,1)$, $P_2(x_2,y_2) = P_2(4,4)$ และ $P_3(x_3,y_3) = P_3(1$ ตามลำดับ

$\therefore$ พื้นที่สามเหลี่ยม $= \frac{1}{2}[(2+4)(4-1) + (4+1)(3-4) + (1+2)(1$

$= \frac{1}{2}[(6)(3) + (5)(-1) + (3)(-2)]$

$= \frac{1}{2}[18 + (-5) + (-6)]$

$= 3.5$ ตารางหน่วย

ข. เรียงจุดมุมยอดแบบตามเข็มนาฬิกา กำหนดให้ $P_1(x_1,y_1) = P_1(2,1)$, $P_2(x_2,y_2) = P_2(1,3)$ และ $P_3(x_3,y_3) = P_3(4$ ตามลำดับ

พื้นที่สามเหลี่ยม $= \frac{1}{2}[(2+1)(3-1) + (1+4)(4-3) + (4+2)($

$= \frac{1}{2}[(3)(2) + (5)(1) + (6)(-3)]$

$= \frac{1}{2}[6 + 5 + (-18)]$

$= -3.5$

$= |-3.5|$

$= 3.5$ ตารางหน่วย

จากตัวอย่างที่ 1 จะพบว่า ถ้าเรียงจุดมุมยอดแบบทวนเข็มนาฬิกา พื้นที่สามเหลี่ยมจะมีค่าเป็น "บวก" และถ้าเรียงจุดมุมยอดตามเข็มนาฬิกา พื้นที่สามเหลี่ยมจะมีค่าเป็น "ลบ" แต่ถ้าใส่เครื่องหมายสมบูรณ์(absolute) เข้าไปในสูตรก็จะได้พื้นที่สามเหลี่ยมเท่ากัน ฉะนั้นจึงเขียนสูตรสำหรับคำนวณหาพื้นที่สามเหลี่ยมใหม่ดังต่อไปนี้

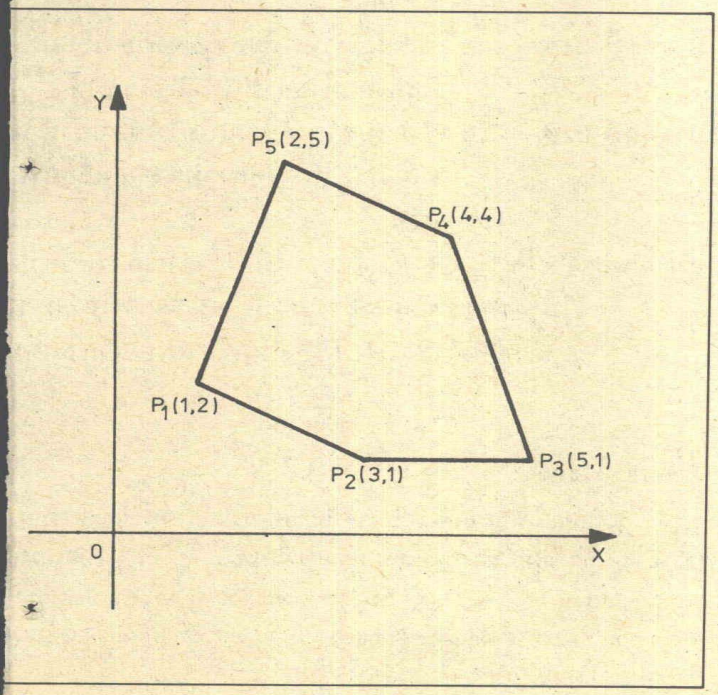
ที่สามเหลี่ยม $= \frac{1}{2} | (x_1+x_2)(y_2-y_1) + (x_2+x_3)(y_3-y_2) + (x_3+x_1)(y_1-y_3) |$

คำนองเดียวกัน สูตรสำหรับคำนวณหาพื้นที่ของรูป n เหลี่ยมจะนใหม่ได้ดังต่อไปนี้

ที่ของรูป n เหลี่ยม $= \frac{1}{2} | (x_1+x_2)(y_2-y_1) + (x_2+x_3)(y_3-y_2) + \ldots\ldots\ldots + (x_{n-1}+x_n)(y_n-y_{n-1}) + (x_n+x_1)(y_1-y_n) |$

ตัวอย่างที่ 2 จงคำนวณหาพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมที่มีจุดมุมเป็น (1,2), (3,1), (5,1), (4,4) และ (2,5) ตามลำดับ

วิธีทำ เขียนรูปห้าเหลี่ยมลงในกระดาษกราฟแบบธรรมดาดังนี้



$\therefore$ พื้นที่ห้าเหลี่ยม $= \frac{1}{2} | (x_1+x_2)(y_2-y_1) + (x_2+x_3)(y_3-y_2) + (x_3+x_4)(y_4-y_3) + (x_4+x_5)(y_5-y_4) + (x_5+x_1)(y_1-y_5) |$

$= \frac{1}{2} | (1+3)(1-2) + (3+5)(1-1) + (5+4)(4-1) + (4+2)(5-4) + (2+1)(2-5) |$

$= \frac{1}{2} | (4)(-1) + (8)(0) + (9)(3) + (6)(1) + (3)(-3) |$

$= \frac{1}{2} | (-4) + 0 + 27 + 6 + (-9) |$

$= 10$ ตารางหน่วย

จะเห็นได้ว่าเมื่อต้องการคำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมที่มีจำนวนจุดมุมยอดมากๆ จะเสียเวลาในการคำนวณมาก และมีโอกาสผิดพลาดได้ง่ายถ้าใช้เครื่องคำนวณแบบธรรมดา ดังนั้นผู้เขียนจึงขอแนะนำให้ใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาเบสิค ที่มีรายละเอียดของโปรแกรมอยู่ในภาคผนวกท้ายบทความนี้ คำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมจะสะดวกรวดเร็วมากกว่า และยังช่วยให้ได้คำตอบที่ถูกต้องแน่นอนอีกด้วย

การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

เมื่อป้อนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาเบสิค ซึ่งมีรายละเอียดอยู่ในภาคผนวกท้ายบทความนี้เข้าเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์เรียบร้อยแล้ว เมื่อสั่งให้เครื่องปฏิบัติการตามคำสั่ง(run) ที่จอภาพจะปรากฏชื่อโปรแกรม พร้อมทั้งรายละเอียดต่างๆ ดังนี้

```
AREA OF A POLYGON

BY
MR.YANYONG SRISOM
DEPARTMENT OF MATERIALS HANDLING TECHNOLOGY
FACULTY OF ENGINEERING
KMIT/NBC
```

หลังจากนั้นที่จอภาพจะปรากฏข้อความ เพื่อบอกให้ป้อนจำนวนจุดมุมยอดของรูปหลายเหลี่ยมลงไป ในที่นี้จะคำนวณหาพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมโดยใช้ข้อมูลในตัวอย่างที่ 2 ดังนั้นเมื่อเครื่องถามจำนวนจุดมุมยอดของรูปหลายเหลี่ยม ก็ป้อนตัวเลข 5 ลงไป ต่อจากนั้นก็จะปรากฏข้อความเพื่อบอกให้ป้อนค่า x และ y ของจุดมุมยอดของรูปห้าเหลี่ยม การป้อนจะเริ่มต้นที่จุดมุมยอดใดก่อนก็ได้ ในที่นี้จะให้จุด

(1,2) เป็นจุดเริ่มต้น และจะเรียงจุดมุมยอดแบบทวนเข็มนาฬิกา หรือแบบตามเข็มนาฬิกาก็ได้ ในที่นี้จะเรียงแบบทวนเข็มนาฬิกา สำหรับการป้อนค่า x และ y ของจุดมุมยอดนี้จะต้องป้อนทีละคู่เรียงกันไปจนกระทั่งครบ คือ (1,2) (3,1), (5,1), (4,4) และ (2,5) ตามลำดับ เมื่อป้อนข้อมูลครบแล้วที่จอภาพจะปรากฏข้อความดังต่อไปนี้

```
NUMBER OF VERTICES (ENTER 0 TO END PROGRAM) ? 5

COORDINATE OF VERTEX  1 ? 1 , 2
             VERTEX  2 ? 3 , 1
             VERTEX  3 ? 5 , 1
             VERTEX  4 ? 4 , 4
             VERTEX  5 ? 2 , 5
```

เมื่อป้อนข้อมูลครบทุกค่าแล้ว เครื่องก็จะคำนวณหาพื้นที่ของรูปห้าเหลี่ยมดังกล่าวให้ และเมื่อคำนวณเสร็จก็จะปรากฏข้อความเพื่อบอกค่าพื้นที่ให้ผู้ใช้ทราบ ต่อจากนั้นเครื่องจะถามว่าต้องการคำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมใหม่อีกหรือไม่ ถ้าต้องการให้ป้อนตัวอักษร "Y" แต่ถ้าไม่ต้องการให้ป้อนตัวอักษร "N" ในที่นี้จะป้อนตัวอักษร "N" ดังนั้นที่จอภาพจะปรากฏข้อความดังต่อไปนี้

```
AREA OF A POLYGON =  10

INPUT 'Y' TO RESTART PROGRAM : 'N' TO STOP ? N
```

สรุป

พื้นที่ของรูปทรงที่เป็นแบบมาตรฐาน จะสามารถคำนวณหาพื้นที่ได้จากสูตรที่หาได้จากหนังสือคณิตศาสตร์ทั่วๆ ไป แต่ถ้าพื้นที่มีรูปทรงไม่เป็นแบบมาตรฐาน เช่น พื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม เป็นต้น การคำนวณหาพื้นที่ของรูปทรงนี้ จะใช้สูตรที่กล่าวมาแล้วคำนวณได้ก็ต่อเมื่อทราบจุดโคออร์ดิเนตของมุมยอดทุกจุด

การใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์คำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมนี้ จะช่วยให้ประหยัดเวลา และสะดวกแก่ผู้ใช้มาก เพราะผู้ใช้เพียงแต่ป้อนจำนวนจุดมุมยอด และค่าของจุดโคออร์ดิเนตของมุมยอดทุกจุดเท่านั้น จากนั้นเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ก็จะคำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมออกมาให้อย่างถูกต้องและรวดเร็ว

ภาคผนวก

โปรแกรมคอมพิวเตอร์ภาษาเบสิคสำหรับคำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม

รายละเอียดของโปรแกรม

```
10  REM   XXXXXXXXXXXX  AREA OF A POLYGON  XXXXXXXXXXXX
20  DIM X(25),Y(25)
30  PRINT CHR$(12)
40  PRINT "_____________________________________________": PRINT
50  PRINT "                AREA OF A POLYGON            ": PRINT
60  PRINT "                     BY                      "
70  PRINT "               MR.YANYONG SRISOM             "
80  PRINT "DEPARTMENT OF MATERIALS HANDLING TECHNOLOGY"
90  PRINT "             FACULTY OF ENGINEERING          "
100 PRINT "                   KMIT/NBC                  "
110 PRINT "_____________________________________________": PRINT
120 REM COORDINATE ARRAYS SHOULD BE SET TO NUMBER OF VERTICES
130 PRINT "NUMBER OF VERTICES (ENTER 0 TO END PROGRAM) ";
140 INPUT N : PRINT
150 IF N = 0 THEN END
160 REM LOOP TO ENTER COORDINATES IN ORDER OF SUCCESSIVE VERTI
170 FOR I = 1 TO N
180 IF I > 1 THEN 210
190 PRINT "COORDINATE OF VERTEX ";I;
200 GOTO 220
210 PRINT "             VERTEX ";I;
220 INPUT X(I),Y(I)
230 NEXT I
240 REM XXX FIRST VERTEX SERVES AS LAST VERTEX XXX
250 X(N+1) = X(1) : Y(N+1) = Y(1) : A = 0
260 REM XXXX CALCULATE AREA AND PRINT RESULT XXXXX
270 FOR I = 1 TO N
280 A = A + (X(I)+X(I+1))*(Y(I+1)-Y(I))
290 NEXT I : PRINT
300 PRINT "AREA OF A POLYGON = "; ABS(A)/2
310 PRINT
320 REM XXXXXXXXXXXX RESTART PROGRAM XXXXXXXXXXXXX
330 PRINT "INPUT 'Y' TO RESTART PROGRAM : 'N' TO STOP ";
340 INPUT A$ : IF A$ = "Y" THEN 30
350 PRINT : END
```

คำอธิบายโปรแกรม

บรรทัดที่ 1ø – 11ø แสดงชื่อโปรแกรม และรายละเอียดต่เกี่ยวกับตัวผู้นำเสนอโปรแกรม

บรรทัดที่ 12ø – 15ø ป้อนตัวเลขบอกจำนวนจุดโคออร์ดิเนตมุมยอดของรูปหลายเหลี่ยม

บรรทัดที่ 16ø – 23ø ป้อนตัวเลขบอกค่า x และ y ของมุมทุกจุด

บรรทัดที่ 24ø – 3øø คำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยม แสดงผลค่าของพื้นที่ที่คำนวณได้

บรรทัดที่ 31ø – 35ø คำถามจากเครื่องเพื่อให้ตอบว่าต้องคำนวณหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมให้หรือไม่

หมายเหตุ PRINT CHR$(12) เป็นคำสั่งลบจอภาพของเครื่องไมโครคอมพิวเตอร์ NEC รุ่น PC-8ØØ1B mk II จะตรงกับคำสั่ง HOME ใน APPLESOFT BA

เอกสารอ้างอิง

1. ลออ เพิ่มสมบัติ "เรขาคณิตวิเคราะห์เบื้องต้น และตรรกศา วารสาร แม็ค ม.ปลาย, กรุงเทพมหานคร : ปีที่ 1 ฉบับที่ 4 (ตุลาคม

2. Lon Poole, Mary Borchers and David M. Castlewitz, "Common BASIC Programs Apple II® Edition" California : OSBO McGraw - Hill, 1976